2025 年 3 月 18 日 星期二

Lec 6

Bertrand Competition

- 假定厂商的策略选择是价格而不是产量
- 仍然假定两个厂商同时行动，生产同质的商品，拥有相同的边际成本c
- 假定消费者会购买价格更低的产品，如果价格一样，消费者会随机选择（一半一半）
- 市场需求为$D(p)$
- 对厂商 1 的需求为 $$D_1(p_1,p_2)=\begin{cases} D(p_1), & \text{if } p_1<p_2 \\ \frac{1}{2}D(p_1), & \text{if } p_1=p_2 \\ 0, & \text{if } p_1>p_2 \end{cases}$$
- 厂商 1 的利润为$\pi_1(p_1,p_2)=(p_1-c)D_1(p_1,p_2)$
- 厂商 2 的需求和利润是类似的形式
- 寻找 NE

  Bertrand 均衡满足

  - $\pi_1(p_1^b,p_2^b)\geq\pi_1(p_1,p_2^b)$ for all p_1
  - $\pi_2(p_1^b,p_2^b)\geq\pi_2(p_1^b,p_2)$ for all p_2

  下面进行分类讨论（根据对称性，只需要考虑$p_1>p_2$的情况）

  - Case1：$p_1>p_2>c$，厂商 1 可以通过$p_1=p_2-\epsilon$偏离来获利
  - Case2：$p_1>c\geq p_2$，厂商 2 可以通过$p_2=p_1-\epsilon$偏离来获利
  - Case3：$c\geq p_1>p_2$，厂商 2 可以通过$p_2=c$偏离来获利
  - Case4：$p_1=p_2>c$，厂商 1 可以通过$p_1=p_2-\epsilon$偏离来获利
  - Case5：$p_1=p_2<c$，厂商 1 可以通过$p_1=c$偏离来获利
  - 唯一可能的情况是$p_1=p_2=c$，这是一个 NE

  此时，两个厂商都获得零利润，市场力量被完全消除。这是因为只要售价还高于边际成本，两个厂商都有很强的动机去定比对方更低的价格，这称为 Bertrand 悖论

- Bertrand 悖论

为什么现实中我们观察不到Bertrand悖论?

- 规模经济

  生产需要边际成本c和固定成本F

  此时两个厂商都会以边际成本出售，都会产生损失

  长期来讲，只会有一个厂商留在市场中，自由进入导致了垄断

- 非常数的边际成本

  假定需求函数是$Q = 10 - p$，两个厂商的成本为$\frac{1}{2}q^2$，则厂商1的利润为

$$\pi_1(p_1,p_2) = \begin{cases} p_1(10-p_1) - \frac{1}{2}(10-p_1)^2, & \text{当 } p_1 < p_2 \\ p_1\left(5-\frac{1}{2}p_1\right) - \frac{1}{2}\left(5-\frac{1}{2}p_1\right)^2, & \text{当 } p_1 = p_2 \\ 0, & \text{当 } p_1 > p_2 \end{cases}$$

  对于厂商2有类似的结果

  证明Bertrand悖论可以不成立，两个厂商都可以取得正利润

  - 首先，纳什均衡中两个厂商一定会设定相同的价格，这是显然的
  - 其次，对于均衡价格，有两个要求

    1）每个厂商的利润非负

    - i.e. $p^*\left(5-\frac{1}{2}p^*\right) - \frac{1}{2}\left(5-\frac{1}{2}p^*\right)^2 \geq 0 \Rightarrow p^* \in [2,10]$

    2）每个厂商都没有动机偏离

    - 显然没有动机提高价格
    - 如果降价至$p < p^*$，则其偏离产生的利润为$p(10-p) - \frac{1}{2}(10-p)^2$
    - 最优偏离利润为$\begin{cases} \frac{50}{3}, & \text{当 } p^* > \frac{20}{3} \\ p^*(10-p^*) - \frac{1}{2}(10-p^*)^2, & \text{当 } p^* \leq \frac{20}{3} \end{cases}$
    - 当$p^* > \frac{20}{3}$时，条件2）要求$p^*\left(5-\frac{1}{2}p^*\right) - \frac{1}{2}\left(5-\frac{1}{2}p^*\right)^2 \geq \frac{50}{3}$，这是不可能成立的

- 当$p^* \le \dfrac{20}{3}$时，条件 2）要求 $p^*\left(5-\frac{1}{2}p^*\right)-\frac{1}{2}\left(5-\frac{1}{2}p^*\right)^2 \ge p^*(10-p^*)-\frac{1}{2}(10-p^*)^2$，在成立时$p^* \in \left[2,\frac{30}{7}\right]$
- 只要$p^* \ne 2$，两个厂商都可以取得正利润

- 不同的成本

  假定两个厂商的边际成本不同，分别为c_1和c_2，$c_1 < c_2$

  记$p_1^m = \arg\max\limits_{p_1} D(p_1)(p_1 - c_1)$为厂商 1 的垄断价格

  情况 1

  - $p_1^m < c_2$，唯一的均衡是市场中只有厂商 1 垄断市场，设定价格为$p_1 = p_1^m$

  情况 2

  - $p_1^m \ge c_2$，此时不存在 NE，可能的结果为厂商 2 设定$c_1 < p_2 \le c_2$，厂商 1 设定$p_1 = p_2 - \epsilon$
  - 最合乎情理的 NE 是$p_1^b = p_2^b = c_2$，因为任意其他的均衡都让厂商 2 的定价低于其边际成本
  - 当厂商有成本差距时，成本低的厂商总是获取全部的份额，并且获得正的收益

- 容量限制（厂商短期内存在产能和库存限制）

  此时厂商知道其可以在涨价的同时不会失去整个市场，所以两个厂商都以边际成本定价不再是均衡

  假定一个日用品的需求是$Q = 6000 - 60p$

  边际成本$c = 10$

  两个厂商都有容量限制，厂商 1 的容量限制$\bar{q}_1 = 1000$，厂商 2 的容量限制$\bar{q}_2 = 1400$

  $p_1 = p_2 = c$不再是均衡，因为此时$Q = 5400$，远超总的市场容量

  假定$\bar{q}_1 < D(p_1)$，厂商 2 设定一个更高的价格$p_2 > p_1$

  两种常见配给法则

  - 有效配给法则（支付意愿最高的消费者先被满足）

    $$D_2(p_2) = \begin{cases} D(p_2) - \bar{q}_1, & \text{if } D(p_2) > \bar{q}_1 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

– 比例配给法则（随机抽人能以低价购买）

$$D_2(p_2) = D(p_2) \times \underbrace{\frac{D(p_1) - \bar{q}_1}{D(p_1)}}_{\text{无法以}p_1\text{购买的消费者的比例}}$$

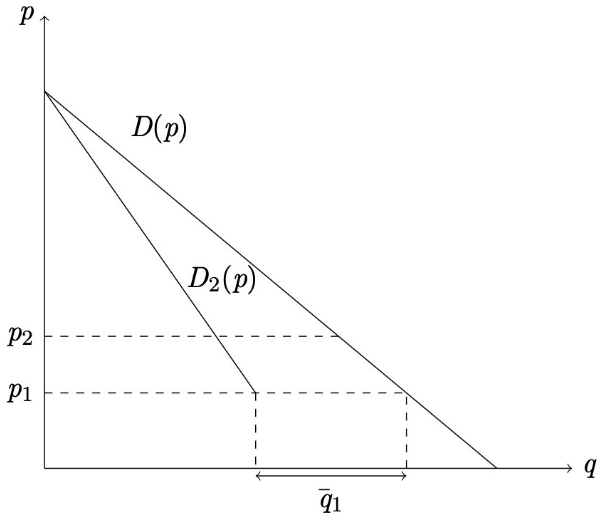


Figure 2: Proportional-rationing rule

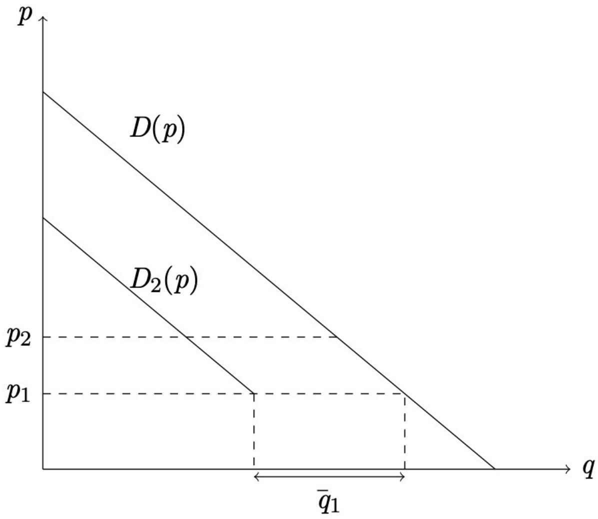
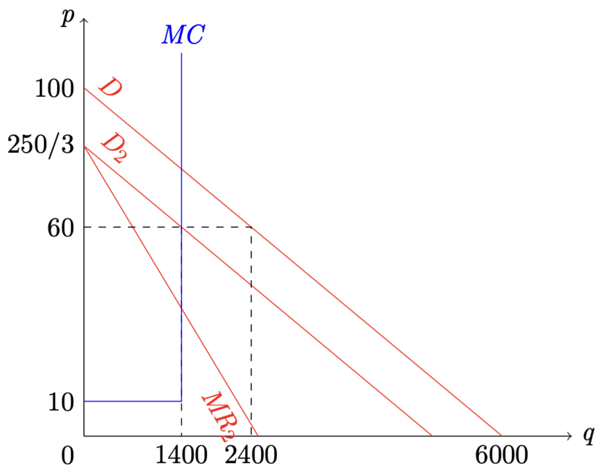


Figure 1: Efficient-rationing rule



当两个厂商都将容量卖完的情况下，市场出清价格为
$2400 = 6000 - 60p \Rightarrow p^* = 60$

假定厂商 1 设定$p_1 = p^* = 60$，下面考虑厂商 2 的选择

- 总需求为2400，与总容量相等
- 厂商 1 销售了1000单位
- 剩余的厂商 2 面对的需求为$q_2 = 5000 - 60p$，逆需求函数为 $p = \frac{250}{3} - \frac{1}{60}q_2$，边际成本$MR_2 = \frac{250}{3} - \frac{1}{30}q_2$
- 下面判断厂商 2 是否有动机偏离$p^* = 60$

  显然没有动机降价

  涨价会降低利润，因为$MR_2 > \frac{250}{3} - \frac{1}{30}\bar{q}_2 = \frac{110}{3} > MC = 10$
- 对于厂商 1 的证明类似，因此$p_1 = p^* = 60$是 NE

- 容量限制：从 Cournot 到 Bertrand

  线性需求：$D(p) = 1 - p$ or $p = 1 - q_1 - q_2$

  投资：厂商i为每单位容量投入c

  考虑以下两阶段模型

  - 两个厂商都选择容量$\bar{q}_i$
  - 厂商设定价格

  均衡价格为$p^* = 1 - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$

  利润为$\pi_i(\bar{q}_i, \bar{q}_j) = \left[1 - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)\right] \bar{q}_i - c\bar{q}_i$

  首先考虑 efficient-rationing rule

  - 假定$c \geq \frac{3}{4}$
  - 使垄断利润最大化的价格为$p^m = \arg\max_p p(1-p) = \frac{1}{2}$，最大化利润为$\pi^m = \frac{1}{4}$
  - 厂商i的净利润最多为$\frac{1}{4} - c\bar{q}_i \geq 0 \Rightarrow$ 每个厂商都选择其容量为$\bar{q}_i \leq \frac{1}{3}$
  - 假定厂商j确定$p_j = p^*$，我们需要证明对于厂商i而言最优选择也是$p_i = p^*$

    由于容量限制，设定$p_i < p^*$显然不是最优

    下面考虑设定$p_i > p^*$

    - 厂商i的利润为$\pi_i = p_i(1 - p_i - \bar{q}_j) - c\bar{q}_i$
    - 由于π_i是关于$p_i$concave 的，则给定$\bar{q}_i, \bar{q}_j \leq \frac{1}{3}$，有$\frac{d\pi_i}{dp_i} = 1 - 2p_i - \bar{q}_j < 1 - 2p^* - \bar{q}_j = 2\bar{q}_i + \bar{q}_j - 1 \leq 0$
    - 因此设定高于p^*的价格不是最优的

  再考虑 proportional-rationing rule

  - 假定$c \geq 1$
  - 垄断价格和利润为$p^m = \frac{1}{2}$和$\pi^m = \frac{1}{4}$
  - 厂商i的净利润最多为$\frac{1}{4} - c\bar{q}_i \geq 0 \Rightarrow$ 厂商i选择$\bar{q}_i \leq \frac{1}{4}$

- $p^* = 1 - \bar{q}_1 - \bar{q}_2 \geq \frac{1}{2}$
- 假定厂商j设定$p_j = p^*$，我们需要证明厂商i也想设定$p_i = p^*$

  设定$p_i < p^*$由于容量限制显然不是最优的

  设定$p_i > p^*$时，

  - 厂商i的剩余需求函数为$(1 - p_i)\frac{1 - p^* - \bar{q}_j}{1 - p^*}$
  - 厂商i的利润为$\pi_i = p_i(1 - p_i)\frac{1 - p^* - \bar{q}_j}{1 - p^*} - c\bar{q}_i$
  - 因为π_i在$p_i > \frac{1}{2}$时是关于p_i严格递减的，所以厂商i不会设定$p_i > p^*$

- 总结：价格比产量容易调整则用 Cournot，产量比价格容易调整则用 Bertrand